

Tính tích phân đường

Xét tích phân:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

với

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x}{y^2 - x^2}, \frac{-y}{y^2 - x^2} \right),$$

và C là một phần của ellipse

$$4x^2 + (y - 4)^2 = 4$$

đi từ điểm $(0, 2)$ đến $(-1, 4)$, ngược chiều kim đồng hồ.

Phần 1 — Viết đúng dạng tích phân đường

Công thức chuẩn:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C P dx + Q dy$$

Trong đó:

$$P(x, y) = \frac{x}{y^2 - x^2}, \quad Q(x, y) = \frac{-y}{y^2 - x^2}.$$

Mục tiêu: tính

$$\int_C \frac{x}{y^2 - x^2} dx - \frac{y}{y^2 - x^2} dy.$$

Phần 2 — Nhận dạng “trường vector đặc biệt”

Xét biểu thức $y^2 - x^2$.

Đạo hàm vi phân:

$$d(y^2 - x^2) = 2y dy - 2x dx.$$

Biến đổi tích phân:

$$\frac{x}{y^2 - x^2} dx - \frac{y}{y^2 - x^2} dy = -\frac{1}{2} \frac{2y dy - 2x dx}{y^2 - x^2}.$$

Do đó:

$$= -\frac{1}{2} d(\ln |y^2 - x^2|).$$

Kết luận:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{2} d(\ln |y^2 - x^2|).$$

$\Rightarrow$ Đây là vi phân toàn phần, trường vector là trường thế, tích phân chỉ phụ thuộc điểm đầu – cuối.

Phần 3 — Áp dụng định lý cơ bản

Vì

$$\int_C d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A),$$

nên

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{2} [\ln |y^2 - x^2|]_{(0,2)}^{(-1,4)}.$$

Phần 4 — Tính từng giá trị

Tại điểm cuối $B = (-1, 4)$:

$$y^2 - x^2 = 16 - 1 = 15 \quad \Rightarrow \quad \ln |y^2 - x^2| = \ln 15.$$

Tại điểm đầu $A = (0, 2)$:

$$y^2 - x^2 = 4 - 0 = 4 \quad \Rightarrow \quad \ln |y^2 - x^2| = \ln 4.$$

Phần 5 — Thế vào công thức

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{2} (\ln 15 - \ln 4).$$

Dùng tính chất log:

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b},$$

nên

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{15}{4}.$$

□ □ **Kết quả cuối cùng**

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{2} \ln \frac{15}{4}.$$

Tóm tắt bản chất

- □ Không cần tham số hóa ellipse.
- □ Nhận ra $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ là vi phân toàn phần.
- □ Trường thế $\Rightarrow$ tích phân chỉ phụ thuộc 2 điểm.
- □ □ Hướng đi ngược hay xuôi không ảnh hưởng.